ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ и ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

XIV Сем. **№ 158.** № 2.

Содержаніе: Теорія выраженій, содержащихъ квадратные радикалы, въ связи съ теоріей графическихъ задачъ элементарной геометріи, *С. Шатуновскаго.*—Построеніе корней квадратныхъ уравненій. *П. С. Флорова.*—Наибольшая мощность и наибольшая производительность гальваническаго тока, *А. Королькова.*—Научная хроника.—Разныя извѣстія.—Доставленныя въ редакцію книги и брошюры.—Задачи №№ 440—445.—Рѣшенія задачъ (2 сер.) №№ 110, 111, 137, и 285 и (1 сер.) 101. — Справ. табл. № XIV. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій.—Библіографическій листокъ новѣйшихъ нѣмецкихъ изданій.—Содержаніе научныхъ журналовъ.

ТЕОРІЯ ВЫРАЖЕНІЙ,

содержащихъ квадратные радикалы,

въ связи

съ теоріей графическихъ задачъ

элементарной геометріи.



ГЛАВА I.

§ 1. Объектами геометрическихъ изслѣдованій являются пространственныя формы (геометрическіе образы) и опредѣляемыя ими величины. Сообразно съ этимъ геометрическія задачи распадаются на два класса: задачи графическія, въ которыхъ по даннымъ геометрическимъ формамъ (т. е. по формамъ, которыя предполагаются непосредственно доступными усмотрѣнію) нужно построить (сдѣлать доступными для усмотрѣнія) другія пространственныя формы, и задачи численныя, въ которыхъ требуется опредѣлить соотношенія величинъ, опредѣляемыхъ геометрическими образами.

Ясно, что графическая задача не имѣетъ смысла, если не сдѣлать никакихъ допущеній относительно того, при какихъ условіяхъ образъ, не заданный непосредственно, будетъ считаться построеннымъ; т. е. для того, чтобы графическая задача имѣла вполнѣ опредѣленное содержаніе и чтобы построенія были вообще возможны, необходимо требовать, чтобы указаны были средства построенія. Въ этомъ отношеніи въ геометріи установлены слѣдующіе постулаты требованія, допущенія):

Геометрическій образъ данъ или построенъ, когда дана или построена система точекъ, которыми образъ опредѣляется. Иногда изъ всевозможныхъ системъ точекъ, которыми образъ опредѣляется, выбираютъ одну опредѣленную систему, и образъ считается построеннымъ только тогда, когда построена эта система.

Въ элементарной плоской геометріи, гдѣ разсматриваются двѣ только линіи: прямая и окружность и образы, ими опредѣляемые, этотъ постулатъ приводится къ двумъ:

Первый постулатъ. Прямая и длина опредѣленнаго ея отрѣзка даны или построены, когда даны или построены двѣ точки прямой или концы отрѣзка.

Второй постулатъ. Окружность дана или построена, если даны или построены ея центръ и двѣ точки, разстояніе между которыми опредѣляетъ длину радіуса.

Этихъ постулатовъ недостаточно, для того, чтобы дать опредѣленное содержаніе графической задачѣ: необходимо еще опредѣлить, что именно разумѣютъ подъ построеніемъ точки Точка, какъ простѣйшій геометрическій образъ, можетъ быть задаваема непосредственно: *) —она построена, когда она есть пересѣченіе данныхъ или построенныхъ линій. Въ элементарной геометріи этотъ постулатъ можетъ быть разсматриваемъ какъ три отдѣльныхъ постулата:

Третій постулатъ: Точка построена, когда она есть пересѣченіе данныхъ или построенныхъ прямыхъ.

Четвертый постулатъ: Точка построена, когда она есть пересѣченіе данныхъ или построенныхъ круговъ.

Пятый постулатъ: Точка построена, когда она есть пересѣченіе даннаго или построеннаго круга съ данной или постренной прямой.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что наиболѣе общее выраженіе графической задачи элементарной плоской геометріи будетъ слѣдующее:

Примѣняя конечное число разъ установленные выше пять постулатовъ, требуется по даннымъ системамъ точекъ построить другія системы точекъ такимъ образомъ, чтобы послѣднія удовлетворяли даннымъ соотношеніямъ **).

Очевидно, что задачи: провести прямую черезъ двѣ данныя точки, описать окружность изъ даннаго центра даннымъ радіусомъ, опредѣлить взаимныя пересѣченія данныхъ прямыхъ и данныхъ круговъ—эти задачи предполагаются въ геометріи рѣшенными т. е. постулатами геометріи устанавливаютъ положеніе, что когда усмотрѣны двѣ точки, то усмотрѣна и прямая, черезъ нихъ проходящая, а когда усмотрѣнъ центръ окружности и двѣ точки, опредѣляющія длину ея радіуса, то усмотрѣна и самая окружность, и т. д. Выраженія: проведемъ прямую черезъ двѣ данныя точки и опи-

---

*) Случай, когда, кромѣ точки, и другіе образы задаются непосредственно, см. § 2, примѣч.

**) Мы говоримъ: «по даннымъ *системамъ*», имѣя въ виду, что въ задачу могутъ входить системы точекъ, совершенно независящія одна отъ другой въ смыслѣ ихъ относительнаго положенія; такъ, окружность можетъ быть задаваема центромъ и двумя точками, опредѣляющими длину радіуса. Положеніе этихъ послѣднихъ совершенно не зависитъ отъ положенія центра окружности.

шемъ кругъ даннаго радiуса изъ даннаго центра заключаютъ въ себѣ тавтологiю, ибо когда двѣ точки даны, то дана и опредѣляемая ими прямая: она есть—таковъ постулатъ. Выраженiя, о которыхъ мы говоримъ, перенесены въ геометрiю изъ области черченiя, гдѣ строятъ *изображенiя* точекъ, прямыхъ и круговъ, обыкновенно, помощью линейки и раздвижного циркуля.

Первые два постулата геометрiи соотвѣтствуютъ въ черченiи тому факту, что, имѣя изображенiя двухъ точекъ прямой или изображенiя центра круга и двухъ точекъ, опредѣляющихъ длину радiуса, мы можемъ вычертить, въ первомъ случаѣ при помощи линейки, а во второмъ при помощи раздвижного циркуля, изображенiя соотвѣтственныхъ прямой и круга. Послѣднiе три постулата имѣютъ себѣ соотвѣтствiе въ томъ фактѣ, что когда вычерчены изображенiя прямыхъ и круговъ, то легко усмотрѣть изображенiя ихъ встрѣчъ. Поэтому постулаты элементарной плоской геометрiи весьма часто объединяются въ слѣдующемъ краткомъ и образномъ выраженiи: *построенiя элементарной плоской геометрiи совершаются только при помощи линейки и раздвижного циркуля*, чему соотвѣтствуетъ слѣдующее наиболѣе общее выраженiе графической задачи:

Употребляя конечное число разъ циркуль и линейку, требуется по даннымъ системамъ точекъ, построить другiя системы точекъ, удовлетворяющiя даннымъ соотношенiямъ. *)

§ 2. Изъ указаннаго содержанiя наиболѣе общей графической задачи вытекаетъ и опредѣленный ходъ ея рѣшенiя. Допустимъ сначала, что мы не вводимъ въ построенiе никакихъ произвольныхъ точекъ. Когда системы точекъ даны, то, на основанiи первыхъ двухъ постулатовъ, заданы также: 1) всѣ прямыя, соединяющiя въ каждой системѣ точки попарно; 2) разстоянiе между каждыми двумя такими точками и 3) всѣ круги, радiусы коихъ равны этимъ разстоянiямъ и центрами которыхъ служатъ данныя точки. Всѣ возможныя пересѣченiя прямыхъ и окружностей одной и той же системы дадутъ въ этой системѣ новыя точки, которыя на основанiи послѣднихъ 3-хъ постулатовъ должны считаться построенными, равно какъ и опредѣляемыя ими и данными точками прямыя, прямолинейные отрѣзки и круги. Такiе точки, прямыя, прямолинейные отрѣзки и круги будемъ называть точками, прямыми, отрѣзками и кругами перваго построенiя. Данными и построенными прямыми и кругами опредѣляются точки и вмѣстѣ съ ними прямыя, прямолинейные отрѣзки и круги второго построенiя и т. д. Продолжая неопредѣленно этотъ рядъ построенiй, получимъ на плоскости построенiя комплексъ точекъ, обнимающiй собою всѣ тѣ точки, которыя могутъ быть построены на основанiи постулатовъ элементарной геометрiи, когда точками исхода служатъ данныя намъ системы точекъ. Если бы этотъ комплексъ точекъ покрылъ всю плоскость построенiя, то всякая графическая задача, относящаяся къ разсмотрѣннымъ исход-

*) Въ статьѣ: «О рѣшенiи задачъ безъ помощи линейки» (Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат. № 125) показано, что 3-й и 5-й постулаты могутъ быть отброшены. Г. Шнейдеръ показалъ («Рѣшенiе геометрич. задачъ при помощи линейки и одного раствора циркуля». Жур. Эл. Мат. 1885/6 уч. г. № 1), что можно сузить содержанiе 4-го постулата, оставивъ остальные безъ измѣненiя.

нымъ системамъ точекъ, могла бы быть рѣшена посредствомъ циркуля и линейки. Но если какая либо точка P плоскости построенія не принадлежала бы комплексу, то задача, относящаяся къ разсмотрѣннымъ точкамъ исхода, не могла бы быть рѣшена при помощи циркуля и линейки, когда искомымъ задачи была бы точка P. Это справедливо по крайней мѣрѣ въ томъ случаѣ, когда при построеніи не вводятъ произвольныхъ точекъ.

Допустимъ теперь, что при построеніи вводились произвольныя точки. Не трудно прежде всего убѣдиться въ томъ, что длина pa, гдѣ p раціональное число и a данная длина, можетъ быть построена помощью циркуля и линейки безъ введенія произвольныхъ точекъ; слѣдовательно, въ разсмотрѣнномъ раньше комплексѣ точекъ около каждой точки описаны круги радіусовъ pa; но такъ какъ длину pa можно заключить между какими угодно предѣлами приличнымъ выборомъ значенія p, то на плоскости построенія нѣтъ такого контура, внутри и внѣ котораго не было бы точекъ, принадлежащихъ комплексу. Точно также на каждой изъ данныхъ и построенныхъ прямыхъ и окружностей будетъ безчисленное множество точекъ, принадлежащихъ комплексу. Отсюда слѣдуетъ, что введеніе произвольныхъ точекъ въ построеніе является излишнимъ во всѣхъ случаяхъ, ибо каждой изъ этихъ точекъ либо приписывается одно только свойство пребыванія въ плоскости построенія, либо точка вводится подъ условіемъ, чтобы она лежала внутри или внѣ нѣкотораго контура, на данной или построенной прямой и т. д. Во всѣхъ этихъ случаяхъ произвольная точка можетъ быть замѣнена точкою комплекса; слѣдовательно, если въ комплексѣ, построенномъ безъ введенія произвольныхъ точекъ, нѣтъ точекъ которыми образъ опредѣляется, то задача совсѣмъ не можетъ быть рѣшена посредствомъ циркуля и линейки; другими словами, если за искомыя точки примемъ точки пересѣченія данныхъ или построенныхъ помощью циркуля и линейки прямыхъ и круговъ съ линіями, ограничивающими искомые образы, и если этихъ точекъ нельзя построить посредствомъ циркуля и линейки, то задача рѣшена быть не можетъ.

Примѣчаніе. Когда кромѣ точекъ задаются непосредственно еще и другіе геометрическіе образы, то предполагаютъ всегда, что мы можемъ выбрать какую либо систему точекъ, которыми образъ опредѣляется. Этотъ случай приводится такимъ образомъ къ предыдущему. Очевидно, что если задача неразрѣшима въ томъ случаѣ, когда замѣняемъ данный образъ системой точекъ A, то она будетъ неразрѣшима и въ томъ случаѣ, когда замѣнимъ образъ какой либо другой системой B, ибо построеніе, въ основу котораго легла система точекъ B, можетъ быть разсматриваемо какъ построеніе, въ основу котораго положена система A, но въ которое введена произвольная система точекъ B.

Итакъ, общій ходъ рѣшенія графической задачи элементарной геометріи заключается въ построеніи комплекса точекъ по указанному выше пріему и въ выборѣ изъ этого комплекса такихъ точекъ, которыя удовлетворяютъ требуемымъ соотношеніямъ. Если въ

комплексѣ такихъ точекъ нѣтъ, то задача не можетъ быть рѣшена посредствомъ циркуля и линейки.

§ 3. Покажемъ теперь, что геометрическія соотношенія, которымъ должны удовлетворять искомыя системы точекъ, всегда могутъ быть выражены аналитическими соотношеніями длинъ нѣкоторыхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, опредѣляемыхъ данными и искомыми точками.

Пусть A_n будетъ данная въ плоскости система n точекъ

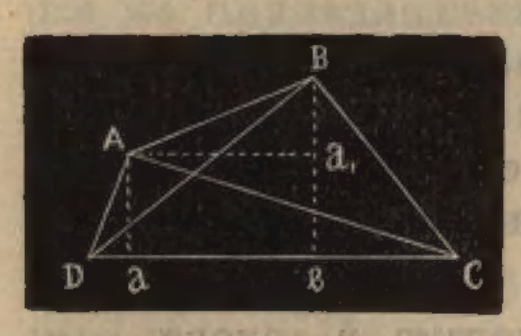
$$a_1, a_2, \dots, a_k \quad a_{k+1} \dots, a_p \dots, a_n.$$

Ими опредѣляется система $\frac{1}{2}n(n-1)$ длинъ данныхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, расположенныхъ на данныхъ прямыхъ, соединяющихъ попарно эти точки. Каждая изъ этихъ прямыхъ, напр. $a_k\, a_{k+1}$ дѣлитъ плоскость построенія на двѣ части, и мы условимся считать разстоянія каждой изъ данныхъ точекъ a_p, отъ точекъ a_k, a_{k+1} положительными, когда точка a_p, расположена въ одной половинѣ плоскости, и отрицательными, когда она расположена въ другой половинѣ. При такомъ условіи можно изъ $\frac{1}{2}n(n-1)$ отрѣзковъ, опредѣляемыхъ системой A_n, выбрать $2n-3$ отрѣзка такимъ образомъ, чтобы ими опредѣлялась система точекъ A_n, а слѣдовательно также длина и положеніе остальныхъ $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ отрѣзковъ Возьмемъ, напр.: 1) отрѣзовъ $a_1\, a_2$; 2) два отрѣзка $a_3\, a_1$, $a_3\, a_2$, соединяющихъ точку a_3 съ двумя предыдущими точками; 3) два отрѣзка, соединяющихъ точку a_4 съ какими либо двумя предыдущими точками и т. д. Тогда будемъ имѣть $2n-3$ отрѣзка, которыми система A_n вполнѣ опредѣляется, ибо если возьмемъ другую систему B_n изъ n точекъ на плоскости и если $2n-3$ отрѣзка системы B_n равны по величинѣ и знаку соотвѣтствующимъ отрѣзкамъ системы A_n, то, наложивъ систему B_n на A_n такъ, чтобы треугольники $a_1\, a_2\, a_3$ и $b_1\, b_2\, b_3$ совпали, найдемъ, что системы совпадутъ и въ остальныхъ точкахъ; слѣдовательно, взятыми въ системѣ A_n отрѣзками опредѣляется система A_n, а съ нею и длины остальныхъ $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ отрѣзковъ. Длины этихъ послѣднихъ отрѣзковъ могутъ поэтому быть выражены аналитически въ длинахъ первыхъ, причемъ легко оправдать слѣдующую лемму:

Лемма I. *Длина прямолинейнаго отрѣзка, опредѣляемаго парой точекъ системы A_n, выражается въ длинахъ отрѣзковъ, которыми система A_n опредѣляется, и въ нѣкоторыхъ раціональныхъ числахъ посредствомъ раціональныхъ дѣйствій* (сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе возвышеніе въ цѣлую степень) *и извлеченія квадратныхъ корней.*

Разсмотримъ случай, когда система A_n состоитъ изъ 4-хъ точекъ A, B, C, D. Шесть прямолинейныхъ отрѣзковъ, опредѣляемыхъ

системой A_4, суть стороны и діагонали 4-ка ABCD (Фиг. 2). Пятью изъ нихъ система опредѣляется; длину шестого отрѣзка, напр. AB, выразимъ въ остальныхъ. Проводимъ для этого высоты Aa и Bb треугольниковъ ACD и BCD относительно общаго основанія CD и прямую $Aa_1 \parallel CD$ до встрѣчи съ Bb въ a_1. Въ △△ ACD и BCD отрѣзки Da и Ca выражаются раціонально въ сторонахъ и въ раціональныхъ числахъ. Высоты Aa и Bb выражаются въ сторонахъ этихъ 3-ковъ посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней, а такъ какъ



Фиг. 2.

$$Aa_1 = \pm(CD \pm Cb \pm Da);\ Ba_1 = \pm(Bb \pm Aa);\ AB = \sqrt{(Aa_1)^2 + (Bb_1)^2},$$

то для системы 4-хъ точекъ лемма доказана.

Допустивъ теперь справедливость леммы для системы n точекъ, докажемъ ея справедливость для системы $n+1$ точекъ, чѣмъ и оправдаемъ лемму вполнѣ. Пусть A будетъ та точка системы, содержащей $n+1$ точекъ, которая оставлена была послѣдней при выборѣ по вышеуказанному способу длинъ, опредѣляющихъ систему; B,C,D,.. .— остальныя точки системы; AC и AD —длины, которыми опредѣляется положеніе точки A относительно точекъ B,C,D,.... Длины отрѣзковъ, соединяющихъ попарно точки B,C,D,..., по допущенію выражаются въ длинахъ, опредѣляющихъ эту систему n точекъ, посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней. Разстояніе точки A отъ какой либо точки B системы B,C,D,.... можетъ быть выражено посредствомъ такихъ-же дѣйствій въ длинахъ AC,AD,BC,BD,CD, какъ это показано было при разсмотрѣніи системы 4-хъ точекъ, слѣдовательно лемма оправдана.

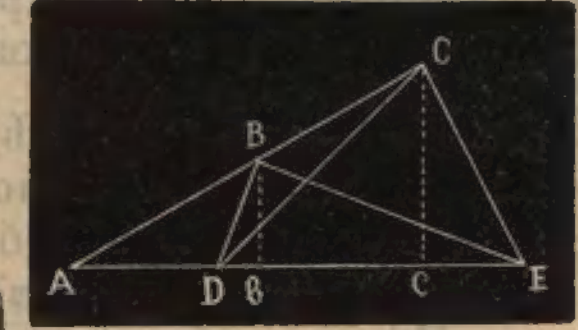
Лемма II. *Длина прямолинейнаго отрѣзка, опредѣляемаго двумя точками изъ комплекса точекъ, построенныхъ посредствомъ циркуля и линейки, выражается посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней въ длинахъ, опредѣляющихъ данныя системы точекъ*

Лемма будетъ доказана, если, допустивъ ея справедливость для прямолинейныхъ отрѣзковъ, соединяющихъ точки B,C,D,E,..., построенныхъ раньше нѣкоторой точки A, мы докажемъ, что она справедлива и для отрѣзковъ, соединяющихъ A съ B,C D,E,.... Но точка A можетъ быть получена только однимъ изъ слѣдующихъ 4-хъ способовъ: 1) Она есть пересѣченіе дугъ, описанныхъ изъ какихъ либо двухъ данныхъ или построенныхъ точекъ, напр.: C и D, радіусами AC и AD, равными отрѣзкамъ, опредѣляемымъ нѣкоторыми изъ точекъ B,C,D,E... Для отрѣзковъ AC и AD лемма справедлива либо по допущенію, либо на основаніи предыдущей леммы. Что же касается отрѣзка, соединяющаго A съ какой либо точкой B группы B,C,D,E,....., то его можно выразить посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней въ отрѣзкахъ AC,AD,BC,BD и CD, какъ мы это видѣли раньше, слѣдоват., въ этомъ случаѣ лемма доказана. 2) Точка A получена какъ пересѣченіе прямой, опредѣляемой 2-мя точками изъ группы

B,C,D,E,... (напр. B и C) съ кругомъ, описаннымъ изъ одной изъ точекъ D,E,.... (напр. D) радіусомъ AD, удовлетворяющимъ требованіямъ леммы. Изъ прилагаемой фигуры имѣемъ

$$AD^2.BC+CD^2.AB-BD^2(AB+BC)=AB.BC.(AB+BC),$$

откуда слѣдуетъ, что AB опредѣляется въ длинахъ AD,DB,DC,BC помощью раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней. Точка A можетъ поэтому разсматриваться какъ пересѣченіе дугъ, описанныхъ изъ B и D радіусами, удовлетворяющими заключенію леммы. Такимъ образомъ этотъ случай приведенъ къ предыдущему. 3) Точка A получена какъ пересѣченіе прямой BC съ дугой, описанной изъ B радіусомъ AB, удовлетворяющимъ заключенію леммы. Этотъ случай не отличается отъ предшествующаго, ибо изъ предыдущаго равенства видимъ, что AD можно выразить требуемымъ образомъ въ AB,BC,CD,BD. 4) Точка A получена какъ пересѣченіе прямыхъ BC и DE. Высоты Bb и Cc тр-ковъ BDE и CDE (предыд. фиг.) выражаются требуемымъ образомъ въ сторонахъ этихъ 3-ковъ. Сверхъ того



Фиг. 3.

$$\pm(AB\pm BC):AB=Cc:Bb,$$

слѣдовательно, AB выражается требуемымъ образомъ въ длинахъ BD,BE CD,CE,DE. Точка A можетъ поэтому разсматриваться какъ пересѣченіе прямой DE съ дугою круга, описаннаго изъ B, радіусомъ, удовлетворяющимъ требованіямъ леммы. Этотъ случай приведенъ такимъ образомъ къ предыдущему.

§ 4. Извѣстно, что всякая длина, которая выражается въ данныхъ длинахъ и въ раціональныхъ числахъ посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней, можетъ быть построена посредствомъ циркуля и линейки. Въ связи съ предыдущими леммами это приводитъ къ слѣдующей важной теоремѣ:

Теорема. *Для того, чтобы графическая задача могла быть разрѣшена посредствомъ циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы прямолинейныя длины, которымъ опредѣляются искомые образы, могли быть выражены въ прямолинейныхъ длинахъ, опредѣляющихъ данные образы, и въ раціональныхъ числахъ посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней.*

Примѣчаніе. Весьма часто искомую длину выражаютъ не въ тѣхъ длинахъ, которыми опредѣляются данныя системы точекъ, а въ какихъ либо данныхъ и построенныхъ длинахъ, $a,b,c,\ldots$ Можетъ случиться, что задача разрѣшима посредствомъ циркуля и линейки, хотя искомая длина и не можетъ быть выражена въ $a,b,c,\ldots$ такъ, какъ это требуется нашей теоремой. Это возможно въ двухъ случаяхъ: 1) когда нѣкоторыми изъ длинъ $a,b,c,\ldots$ опредѣляется какая либо система точекъ, а нѣкоторыя изъ остальныхъ длинъ $a,b,c\ldots$ опредѣляются этими точками. Послѣднія длины могутъ быть выражены въ первыхъ, и если послѣ этого искомая длина

не способна выразиться въ оставшихся длинахъ посредствомъ вышеуказанныхъ дѣйствій, то задача неразрѣшима посредствомъ циркуля и линейки; 2) иногда указывается частное свойство даннаго образа и этимъ устанавливается нѣкоторое соотношеніе между опредѣляющими его длинами. Задача въ этомъ случаѣ не можетъ быть рѣшена посредствомъ циркуля и линейки только тогда, когда искомую длину нельзя выразить посредствомъ раціональныхъ дѣйствій и извлеченія квадратныхъ корней въ *наименьшемъ* числѣ длинъ, которыми опредѣляются данные образы. Такъ напр., выраженіе $x=\sqrt[3]{(c^2+2ab)(a+b)}$, гдѣ a,b,c суть стороны треугольника, не можетъ быть вообще построено циркулемъ и линейкой, какъ въ этомъ можно будетъ потомъ убѣдиться. Но если противъ стороны c лежитъ прямой уголъ, то $c^2=a^2+b^2$ и $x=a+b$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что рѣшеніе графической задачи посредствомъ циркуля и линейки приводится: 1) къ разысканію уравненія, связывающаго искомую длину съ *наименьшимъ числомъ длинъ*, которыми опредѣляются данные образы; 2) къ опредѣленію признаковъ, по которымъ можно было бы судить, удовлетворяется ли это уравненіе выраженіями, въ которыхъ данныя количества и раціональныя числа связаны раціональными дѣйствіями и извлеченіями квадратныхъ корней и 3) къ опредѣленію этихъ выраженій въ случаѣ разрѣшимости задачи посредствомъ циркуля и линейки.

Изученіе свойствъ выраженій, въ которыхъ данныя количества и раціональныя числа не связаны никакими ирраціональными дѣйствіями, кромѣ извлеченія квадратныхъ корней, и рѣшеніе уравненій посредствомъ такихъ выраженій составитъ предметъ слѣдующихъ главъ.

С. Шатуновскій (Одесса)

(Продолженіе слѣдуетъ).

ПОСТРОЕНІЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

П. С. Флорова *).

Мы изложимъ въ этой замѣткѣ два пріема построенія положительныхъ корней квадратныхъ уравненій, разсматривая квадратныя уравненія, согласно закону однородности, въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$x^2-px-q^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

$$x^2+px-q^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

$$x^2-px+q^2=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

---

*) Статья заимствована изъ книги П. Флорова, „Приложеніе алгебры къ геометріи“, имѣющей въ скоромъ времени появиться въ печати.



Фиг. 4.

Первый пріемъ.—Строимъ прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 4) по катетамъ $AB=2q$ и $BC=p$ и описываемъ около него кругъ. Изъ центра этого круга O опускаемъ перпендикуляръ на AB. Пусть F и G будутъ точки пересѣченія перпендикуляра съ кругомъ, а E—точка его пересѣченія съ AB. Построеніе доставляетъ

$$AC=\sqrt{p^2+4q^2};\quad OE=\frac{p}{2}.$$

Слѣдовательно

$$EF=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2};\ EG=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q^2}.$$

Отсюда видно, что EF представляетъ собою положительный корень уравненія (1), а EG—положительный корень уравненія (2).

Займемся теперь уравненіемъ (3). Оба его корня будутъ вещественны и неравны между собою только при условіи $p>2q$. Предположимъ, что это условіе соблюдено и построимъ прямоугольный треугольникъ ABC (фиг. 4) по гипотенузѣ $AC=p$ и катету $AB=2q$. Описавъ около треугольника кругъ, опустимъ изъ его центра O перпендикуляръ на AB. Пусть F и G будутъ точки пересѣченія перпендикуляра съ кругомъ, а E—точка его пересѣченія съ AB. Построеніе доставляетъ

$$BC=\sqrt{p^2-4q^2};\quad OF=\frac{p}{2}.$$

Слѣдовательно

$$EF=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2};\ EG=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}.$$

Такимъ образомъ EF и EG суть корни уравненія (3).

Примѣчаніе. Такъ какъ всякая хорда есть средняя пропорціональная между діаметромъ круга, проходящаго черезъ конецъ хорды, и ея проэкціей на этотъ діаметръ, то

$$AF^2=FG\,.\,EF,\quad AG^2=GF\,.\,EG.$$

Полагая, что треугольникъ ABC обладаетъ данной гипотенузой $AC=p$ и даннымъ катетомъ $AB=2q$, находимъ

$$AF^2=p\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}\right);\ AG^2=p\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}\right).$$

Эти формулы показываютъ, что AF и AG суть корни биквадратнаго уравненія

$$x^4-p^2x^2+p^2q^2=0.$$

Второй пріемъ.—Строимъ квадратъ ABCD (фиг. 5), площадь котораго равна q^2, и по сторонѣ AB отъ вершины A откладываемъ $AE=\frac{p}{2}$. Пусть биссектриса угла EDC пересѣкаетъ сторону BC въ точкѣ F, а продолженіе стороны AB въ точкѣ G. Построеніе доставляетъ

$$EG^2=ED^2=AE^2+AD^2.$$

Фиг. 5.

Поставивъ сюда AG—AE вмѣсто EG, получимъ

$$AG^2-2AE.AG=AD^2,$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$AG^2-p\,.\,AG-q^2=0.$$

Этотъ результатъ удостовѣряетъ, что AG представляетъ собою корень уравненія (1). Прямоугольные треугольники DCF и DAG подобны между собою. Слѣдовательно

$$\frac{CF}{CD}=\frac{AD}{AG}\text{ или }AG=\frac{q^2}{CF}.$$

Поставивъ это значеніе AG въ предыдущее уравненіе, получимъ

$$CF^2-p\,.\,CF-q^2=0.$$

Отсюда видно, что CF представляетъ собою корень уравненія (2).

Чтобы построить корни уравненія (3), относительно котораго опять предположимъ $p>2q$, должно построить квадратъ ABCD (фиг. 5) по площади q^2 и изъ точки D, какъ изъ центра, радіусомъ $DE=\frac{p}{2}$ описать окружность, пересѣкающую AB въ точкѣ E. Пусть биссектриса угла EDC будетъ прямая DFG. Построеніе доставляетъ

$$EG^2=ED^2=EA^2+AD^2.$$

Поставивъ сюда AG—EG на мѣсто EA, получимъ

$$AG^2-2EG\,.\,AG+AD^2=0,$$

что можно представить въ такомъ видѣ

$$AG^2-p.\ AG+q^2=0.$$

Замѣнивъ здѣсь AG черезъ $q^2:CF$, будемъ имѣть

$$CF^2-p.\ CF+q^2=0.$$

Отсюда отчетливо видно, что AG и CF суть корни уравненія (3).

Примѣчаніе. Прямоугольные треугольники DCF и ADG доставляютъ

$$DF^2=CD^2+CF^2;\ DG^2=AD^2+AG^2.$$

Полагая, что треугольникъ ADE обладаетъ даннымъ катетомъ $AD=q$ и данною гипотенузою $DE=\frac{p}{2}$, находимъ:

$$DF^2=p\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}\right);\quad DG^2=p\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^2}\right).$$

Эти формулы показываютъ, что DF и DG суть корни биквадратнаго уравненія

$$x^4-p^2x^2+p^2q^2=0.$$

П. Флоровъ (Тамбовъ).

НАИБОЛЬШАЯ МОЩНОСТЬ

и наибольшая производительность гальваническаго тока.

По вопросу о наивыгоднѣйшемъ дѣйствіи тока часто встрѣчаются невѣрныя мнѣнія не только въ учебникахъ физики, но даже въ такихъ книгахъ, какъ спеціальные учебники по электротехникѣ, напр. въ „Основаніяхъ электротехники“ Постникова (Москва, 1893), гдѣ во II части (стр. 45 и др.) утверждается, что „maximum полезной работы батареи во внѣшней цѣпи или, какъ говорятъ обыкновенно, отдача ея никогда не превыситъ 50% ея полной потенціальной энергіи“.

Ошибки чаще всего происходятъ отъ неясности словъ „наивыгоднѣйшее дѣйствіе“. Поэтому будетъ нелишнимъ коснуться этого вопроса подробнѣе.

1. *Механическое значеніе электровозбудительной силы.* Разсмотрѣніе тепловыхъ, химическихъ и пр. явленій, производимыхъ гальваническимъ токомъ, показываетъ, что *электровозбудительная сила измѣряется работою, производимою въ цѣпи при передвиженіи одной единицы электричества.*

По закону Джауля, количество теплоты T, выдѣляемое въ цѣпи, выразится формулою

$$T = i^2rt,$$

гдѣ i есть сила тока въ амперахъ, r сопротивленіе въ омахъ, t время прохожденія въ секундахъ, T теплота, измѣренная въ единицахъ работы *уаттахъ* ($\frac{1}{736}$ лошадиной силы). При иныхъ единицахъ пришлось-бы, вообще говоря, ввести въ формулу коэффиціентъ, отличный отъ единицы.

Назовемъ черезъ q количество электричества, протекшее во время t; тогда

$$q = it,$$

ибо i есть количество электричества (число кулоновъ), протекшее въ цѣпи въ 1 секунду. Кромѣ того по формулѣ Ома, называя черезъ e электровозбудительную силу, имѣемъ

$$i = \frac{e}{r} \text{ или } e = ir,$$

откуда

$$T = eq.$$

Если q равно единицѣ, то

$$T_1 = e,$$

т. е. электровозбудительная сила (въ вольтахъ) численно равна работѣ (въ уаттахъ), производимой въ цѣпи при прохожденіи одной единицы (кулона) электричества.

Разсмотрѣніе химическихъ явленій приводитъ къ тому [redacted] заключенію. При прохожденіи одной единицы электричества, въ элементѣ (Даніеля, Бунзена) одинъ электрохимическій эквивалентъ цинка соединится съ сѣрною кислотою. При этомъ выдѣлится нѣкоторое количество теплоты, часть которой потратится на другіе химическіе и физическіе процессы, происходящіе внутри элемента; но во всякомъ случаѣ останется нѣкоторое количество теплоты, эквивалентное работѣ H, которое и пойдетъ на образованіе тока. Если сила тока будетъ i, а продолжительность его t сек., то соотвѣтственно этому и работа, потраченная [redacted] образованіе тока, будетъ Hit. Если въ цѣпи не будетъ иныхъ дѣйствій, кромѣ тепловыхъ, то вся эта работа потратится на нагрѣваніе цѣпи i^2rt, т. е.

$$Hit = i^2rt \text{ или } H = ir,$$

откуда

$$H = e,$$

ибо по формулѣ *Ома* $ir = e$.

2. *Наибольшая сила тока.* Пусть имѣемъ N элементовъ, раздѣленныхъ [redacted] n параллельныхъ группъ, составленныхъ изъ m послѣдовательно соединенныхъ элементовъ въ каждой группѣ. ($N = mn$). Пусть e электровозбудительная сила одного элемента, r его сопротивленіе, ρ внѣшнее сопротивленіе. Тогда сила тока i выразится такъ

$$i = \frac{em}{\rho + \frac{rm}{n}} = \frac{emn}{\rho n + rm} = \frac{eN}{\rho n + rm}.$$

Чтобы i была наибольшею, необходимо, чтобы знаменатель имѣлъ наименьшее значеніе (числитель eN постоянная величина). Если знаменатель $A = \rho n + rm$ имѣетъ наименьшую величину, то [redacted] A^2 имѣетъ наименьшее значеніе.

$$A^2 = \rho^2 n^2 + 2r\rho mn + r^2 m^2 = (\rho n - rm)^2 + 4\rho r N.$$

Отсюда видно, что наименьшее значеніе A и наибольшее значеніе для i будетъ при

$$\rho n - rm = 0,$$

или при $\rho = \frac{rm}{n}$, т. е. въ томъ случаѣ, если внутреннее сопротивленіе равно внѣшнему.

При этомъ
$$i_{max} = \frac{emn}{2rm} = \frac{emn}{2\rho n}.$$

$$i_{max} = \frac{en}{2r} = \frac{em}{2\rho} = \frac{1}{2} i_0,$$

если подъ i_0 будемъ понимать ту силу тока, которая получилась-бы при внѣшнемъ сопротивленіи, равномъ нулю:

$$i_0 = \frac{\text{[illegible]}}{\left(\frac{rm}{n}\right)} = \frac{en}{r}.$$

Итакъ мы нашли наибольшую силу тока при условіи, что въ нашемъ распоряженіи находится только группировка элементовъ.

3. *Наибольшая полезная мощность гальваническаго тока. Мощностью* источника работы называется количество работы, производимое имъ въ 1 секунду.

Работу, происходящую во внѣшней цѣпи, мы можемъ такъ или иначе эксплуатировать и потому назовемъ ее *полезною* работою. Работу, затрачиваемую внутри элемента (на нагрѣваніе и пр.), будемъ считать безполезною.

Пусть электровозбудительная сила батареи есть e, ея сопротивленіе r_0; требуется узнать, при какомъ внѣшнемъ сопротивленіи ρ полезная мощность тока будетъ наибольшая?

Силу тока при полномъ сопротивленіи $r_0 + \rho$ назовемъ черезъ i; если-бы внѣшнее сопротивленіе отсутствовало, то сила тока была бы $i_0 = \frac{e}{r_0}$, откуда
$$e = i_0 r_0.$$

При токѣ i каждую секунду проходитъ i единицъ электричества, а передвиженіе каждой единицы электричества даетъ въ наше распоряженіе e уаттовъ работы. Поэтому полная работа тока во всей цѣпи *въ одну секунду* или мощность его есть ei. Часть этой работы, идущая на нагрѣваніе батареи и соединительныхъ проволокъ, равная $i^2 r_0$ для насъ безполезна. Поэтому полезная работа, которую мы можемъ утилизировать каждую секунду, выразится разностью
$$U = ei - i^2 r_0 = i\,(e - ir_0).$$
Но $e = i_0 r_0$, а потому
$$U = r_0 i\,(i_0 - i).$$

Оба множителя i и $i - {}_0 i$ имѣютъ постоянную сумму i_0, а потому ихъ произведеніе будетъ наибольшимъ, если оба множителя равны
$$i = i_0 - i \text{ или } i = \frac{1}{2}\, i_0,$$

т. е. *наибольшая полезная мощность будетъ въ то время, когда сила тока составитъ половину той силы тока, которая получилась-бы, еслибы внѣшняго сопротивленія не было.*

Легко видѣть, что при этомъ внѣшнее сопротивленіе равно внутреннему.

$$i=\frac{e}{r_0+\rho};\quad i_0=\frac{e}{r_0};\quad i=\frac{1}{2}i_0.$$

$$r_0+\rho=2r_0;\quad r_0=\rho.$$

Вся работа цѣпи есть

$$ei=\frac{e^2}{2r_0};$$

полезная часть работы

$$U=ei-i^2r_0=ei-\frac{ei}{2}=\frac{ei}{2}=\frac{1}{4}\frac{e^2}{r_0^2},$$

т. е. *для наибольшей мощности* отдача работы равна 50%.

Сила тока при этомъ не будетъ ни наибольшею, ни наименьшею; уменьшивъ внѣшнее сопротивленіе до 0, мы увеличимъ силу тока вдвое; увеличивъ ρ, мы уменьшимъ силу тока.

4. *Наибольшая производительность гальваническаго тока.* Мы можемъ получить отдачу гораздо больше 50% (теоретически до 100%), если ограничимся меньшею мощностью, т. е. потребуемъ каждую секунду меньшую работу.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что полезная работа U выражается формулою

$$U=ei-i^2r_0.$$

Отношеніе полезной части работы ко всей затраченной работѣ назовемъ коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія; обозначимъ его черезъ k. Имѣемъ

$$k=\frac{ei-i^2r_0}{ei}=1-\frac{ir_0}{e}=1-\frac{r_0}{\rho+r_0},$$

ибо

$$i=\frac{e}{r_0+\rho}.$$

Отсюда видно, что наибольшее значеніе k будетъ равно 1 (отдача 100%), что произойдетъ при $r_0=o$ или при $\rho=\infty$ (сила тока при этомъ, вообще говоря, не будетъ ни наибольшею, ни наименьшею).

Такимъ образомъ можно воспользоваться какъ угодно большою частью работы тока, уменьшая внутреннее сопротивленіе батареи или увеличивая внѣшнее сопротивленіе.

Условія наибольшей силы тока и наибольшей полезной мощности совпадаютъ только въ томъ случаѣ, если внѣшнее сопротивленіе дано.

Условіе наибольшей отдачи, вообще говоря, не совпадаетъ съ условіемъ наибольшей мощности и наибольшей силы тока.

А. Корольковъ (Спб.).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Теплота испаренія жидкости, выраженная въ килограммометрахъ, равна приблизительно квадрату скорости звука въ парахъ той-же жидкости. Это интересное соотношеніе найдено Тумлирцемъ (Tumlirz, Sitz. Wien. Akad., 101, 184) и провѣрено имъ на основаніи данныхъ Реньо, Фавра и Зильбермана, Эндрьюса, Видеманна [redacted] др. для 13-и жидкостей (вода, треххлористый фосфоръ, хлорное олово, эфиръ, бензолъ, хлороформъ, сѣрнистый углеродъ, спиртъ и др.). Отклоненія въ среднемъ равны 3—4% (только для спирта 15%). Называя теплоту испаренія черезъ h, а скорость звука въ парахъ жидкости черезъ v, получимъ:

$$425\ h = v^2.$$

(Ж. Ф. Х. О.) *В. Г.*

Новые опыты надъ электропроводностью газовъ. Если электрическое разряженіе происходитъ черезъ одну часть газа, находящагося въ трубкѣ, то весь газъ переходитъ въ особое состояніе, при которомъ онъ хорошо проводитъ электричество. *Шустеръ* изучилъ законы этой проводимости и сдѣлалъ объ этомъ сообщеніе въ Британской Ассоціаціи въ Эдинбургѣ. Онъ доказалъ, что проводимость обусловливается диссоціаціей газовыхъ молекулъ, а замѣченная имъ электрическая поляризація указывала на явленіе электролиза. Сила поляризаціи зависитъ отъ природы электродовъ: она мала для мѣди и желѣза и значительна для алюминія и магнія.

Бхм.

Поднятіе воздушныхъ пузырей въ жидкости. Если воздушный пузырь поднимается въ водѣ, то, на основаніи сообщенія *Трутона*, сдѣланнаго въ Британской Ассоціаціи въ Эдинбургѣ, скорость поднятія представляетъ собою періодическую функцію величины пузыря. Если отложить [redacted] абсциссѣ объемъ пузырей, а на ординатѣ соотвѣтствующія скорости, то кривая показываетъ, что сначала увеличеніе объема пузыря уменьшаетъ скорость, но затѣмъ скорость опять увеличивается, достигаетъ максимума, который приблизительно вдвое больше минимума, потомъ опять уменьшается и т. д. два или три раза, смотря по діаметру употребленной трубки. Колебанія кривой утихаютъ по тому же закону, какъ и колебанія маятника въ вязкой средѣ. Форма пузыря при первомъ минимумѣ шарообразна, послѣ этаго пузырь сверху пріостряется, пока не наступитъ второй минимумъ, тогда онъ сверху становится опять закругленнымъ и т. д. Вмѣсто воздуха были взяты также жидкости, не смѣшивающіяся съ водой. Воздушные пузыри были изслѣдованы также и въ другихъ жидкостяхъ. *Бхм.*

Замѣчательное **зеркальное отраженіе отъ поверхности кирпичной стѣны** имѣлъ случай наблюдать *Davis* 10 февраля въ Кембриджѣ во время яснаго зимняго дня. Земля была покрыта вездѣ снѣгомъ, но днемъ солнце растопило снѣгъ. *Дависъ* разговаривалъ случайно вблизи сѣвернаго угла длинной кирпичной стѣны, на которую па-

дали вертикально лучи заходящаго солнца и производили сильное нагрѣваніе. На разстояніи около 100 футовъ отъ стѣны шелъ человѣкъ и авторъ замѣтилъ его руку въ стѣнѣ, какъ въ зеркалѣ. При внимательномъ изслѣдованіи онъ замѣтилъ, что если его глазъ былъ на разстояніи 1 дюйма отъ поверхности стѣны, то болѣе отдаленная часть стѣны становилась невидимой, а вмѣсто нея показывались отдаленные предметы. Отраженіе соотвѣтствовало вполнѣ тому, которое наблюдается на водѣ, когда надъ ней дуетъ холодный вѣтеръ. Отраженіе отъ стѣны происходило всего вѣроятнѣе вслѣдствіе слоя теплаго воздуха на поверхности нагрѣтой стѣны. (Amer. meteor. Journ., 8 p. 525. 1892). *Бхм.*

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

-ж- Въ Парижской обсерваторіи *Деландръ* устраиваетъ большой телескопъ съ спектрофотографомъ, который ему позволитъ дѣлать наблюденія надъ движеніемъ звѣздъ по линіи зрѣнія. Большая свѣтовая сила парижскаго инструмента позволитъ измѣреніе звѣздъ до 4 величины, тогда какъ *Фогель* въ Берлинѣ былъ принужденъ ограничиться до сихъ поръ только самыми свѣтлыми звѣздами. Между прочими усовершенствованіями слѣдуетъ упомянуть, что измѣреніе передвиженія спектральныхъ линій будетъ сравниваться со всѣми водородистыми линіями, а также желѣзными и кальціевыми. *Бхм.*

-ж- **Землетрясеніе на о-вѣ Самосѣ** произошло 15-го декабря 1892 г. Оно началось въ 1 часъ дня, продолжалось до $11^1/_2$ час. ночи и возобновилось на слѣдующій день. Сила землетрясенія была такова что жители покинули дома. ,

-ж- **Скорость движенія тучъ** зимою гораздо больше, чѣмъ лѣтомъ, какъ оказывается на основаніи наблюденій, произведенныхъ въ Массачусетсѣ, въ обсерваторіи Ротта. Кромѣ того зимою тучи проходятъ ближе къ земной поверхности. Въ верхнихъ слояхъ атмосферы тучи движутся въ среднемъ со скоростью 140—150 верстъ въ часъ, но иногда скорость ихъ доходитъ до 350 верстъ. Въ верхнихъ слояхъ атмосферы преобладаетъ западное направленіе, въ среднихъ (4000 метровъ)—юго-западное, въ нижнихъ—сѣверозападное.

-ж- **Усовершенствованія въ телескопѣ обсерваторіи Lick.** Милліонеръ Іеркесъ въ Чикаго заказалъ для объектива телескопа въ обсерваторіи Lick двояко-выпуклое стекло 45 дюймовъ въ діаметрѣ, т. е. на 9 слишкомъ дюймовъ больше настоящаго.

-ж- **Температура лавы Этны**, была въ послѣднее время приблизительно измѣрена проф. Бартоли. Воспользовавшись исключительнымъ положеніемъ потока лавы, вытекавшаго изъ подземнаго прохода, онъ приблизился на разстояніе двухъ метровъ къ раскаленной массѣ и погрузилъ въ нее желѣзную въ концѣ заостренную

трубку, заключавшую въ себѣ кусокъ платины. Продержавъ ее десять минутъ въ лавѣ, потомъ быстро вытащивъ, онъ опустилъ платину въ воду калориметра. Такимъ способомъ удалось узнать, что температура лавы на глубинѣ одного метра, варьировала отъ 1060° до 970°; послѣ прохожденія двухъ километровъ со скоростью 80 метровъ въ часъ, температура лавы на той же глубинѣ упала до 200°.

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ *).

Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ. *И. Слешинскаго.* Одесса. 1892.

Опытъ систематизаціи употребительнѣйшихъ ариѳметическихъ задачъ по типамъ. Составилъ *А. А. Терешкевичъ.* Москва. 1893. Складъ изданія: Москва, Кузнецкій мостъ, учебный магазинъ „Начальная школа“ Е. Н. Тихомировой. Цѣна 30 коп.

Рѣшеніе проблемы квадратура круга. Поправленіе постоянной величины П. Соч. *Оскаръ А. Флоръ* cand phys. Рига. 1892. Цѣна 1 р.

Современные взгляды на электричество. Вступит. лекція, читанная 29 сентября 1892 г. въ Имп. Унив. Св. Владиміра профессоромъ *Г. Г. Де-Метцомъ.* Кіевъ. 1892.

Къ теоріи способа наименьшихъ квадратовъ. *С. П. Ярошенко.* Одесса. 1892.

Теорія движенія подобно-измѣняемаго тѣла. *Д. Н. Зейлигера,* приват.-доц. Имп. Казанскаго Университета. Казань. 1892. Ц. 1 р. 50 к.

Наблюденія земного магнетизма, произведенныя въ магнитно-метеорологической обсерваторіи Императорскаго казанскаго университета въ 1891 году. Казань. 1893.

Курсъ дополнительныхъ статей алгебры съ приложеніемъ 140 задачъ. По новой программѣ реальныхъ училищъ. Составилъ *П. С. Флоровъ.* Изд. книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1893. Ц. 1 р.

Изъ области науки. Новые опыты съ падающими и катящимися тѣлами. Проф. *Н. А. Любимова.* (Изъ № 255 „Правительств. Вѣстника“ 1892 года).

ЗАДАЧИ.

№ 440. На радикальной оси двухъ данныхъ пересѣкающихся окружностей найти такую точку, чтобы касательныя, проведенныя изъ нея къ обѣимъ окружностямъ, составляли между собой данный уголъ. Сколько рѣшеній?

А. Шостакъ (Одесса).

*) См. «Вѣстникъ Оп. Физики» № 151, стр. 149.

№ 441. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу. Данъ равносторонній треугольникъ ABC, сторона котораго равна a. На продолженіи BC (или на BC) взята точка P на разстояніи s отъ вершины C. Требуется

1) построить равнобедренный треугольникъ такъ, чтобы вершина одного изъ равныхъ угловъ совпадала съ P, двѣ другія вершины лежали на сторонахъ AB и AC (или на ихъ продолженіяхъ) и одна изъ равныхъ сторонъ была-бы параллельна BC;

2) вычислить стороны такого треугольника.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 442. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2c}\left(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}\right) = 0.$$

В. Херувимовъ (Харьковъ).

№ 443. Стороны многоугольника, описаннаго около окружности радіуса r, равны по порядку $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$. Проведены окружности: первая касается стороны a_1 и продолженій сторонъ a_n и a_2, вторая — стороны a_2 и продолженій сторонъ a_1 и a_3, и т. д., наконецъ n-ая — стороны a_n и продолженій сторонъ a_{n-1} и a_1. Радіусы этихъ окружностей обозначены по порядку черезъ r_1, r_2, $r_3, \ldots, r_n$. Доказать, что

$$(a_1-a_2)(a_2r_1-a_1r_2)=r(r_1-r_2)^2; (a_2-a_3)(a_3r_2-a_2r_3)=r(r_2-r_3)^2;$$
$$\ldots . (a_n-a_1)(a_1r_n-a_n r_1)=r(r_n-r_1)^2.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 444. По данному углу ω, подъ которымъ видны два предмета M и N изъ какой нибудь точки C, опредѣлить уголъ x, подъ которымъ они будутъ видны изъ другой точки S.

Примѣчаніе.— Рѣшеніе этой задачи носитъ названіе *приведенія угла къ центру станціи* или *центрировки.*

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 445. Часы съ маятникомъ спѣшатъ при 0^0 на 7 секундъ въ сутки, а при температурѣ въ 20^0 отстаютъ на 9 секундъ въ сутки. Вычислить линейный коэффиціентъ расширенія маятника.

(Заимств.) *П. П.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 110 (2 сер.). Показать, что произведеніе сторонъ гармоническаго четыреугольника равно четырехкратному произведенію его медіанъ.

Обозначивъ средины діагоналей BD и AC черезъ E и F, находимъ

$$4AE.CE=BD^2; \ 4BF.DF=AC^2.$$

Такъ какъ $$AB.CD = BC.AD = \frac{1}{2} AC.BD,$$

то $$AC^2.BD^2 = 4AB.CD.BC.AD$$

и $$AB.BC.CD.DA = 4AE.CE.BF.DF.$$

В. Россовская (Курскъ); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ); *В. Рубцовъ* (Уфа); *И. Бискъ*, (Кіевъ).

№ 111 (2 сер.). Въ Руководствѣ Космографіи А. Малинина и К. Буренина, въ главѣ „Измѣреніе времени" и въ § „Календарь" находимъ слѣдующее:

„Если отбросить доли сутокъ и считать годъ ровно въ 365 сутокъ, то каждый годъ будетъ короче истиннаго почти на $^1/_4$ сутокъ, такъ что будетъ считаться начало новаго года, хотя еще осталось почти 6 часовъ стараго; въ 100 лѣтъ эта ошибка возрастетъ до 25 дней, и весеннее равноденствіе, которое бываетъ въ мартѣ, черезъ, 100 лѣтъ придется уже въ февралѣ; черезъ 500 лѣтъ оно пришлось бы въ октябрѣ."

Указать, объяснить и исправить ошибку, заключающуюся въ этихъ словахъ.

Отбрасывая ежегодно доли сутокъ, мы опережаемъ *въ счетѣ* истинное время приблиз. на 25 дней въ 100 лѣтъ, но на самомъ дѣлѣ отстаемъ отъ неподвижныхъ точекъ равноденствія. Поэтому черезъ 100 лѣтъ считалось-бы наступившимъ 9-е марта, когда до весенняго равноденствія оставалось-бы еще 25 дней, т. е. оно наступило-бы въ апрѣлѣ, а черезъ 500 лѣтъ оно пришлось-бы въ іюлѣ.

С. Ржаницынъ (Троицкъ); *В. Тюнинъ*, *А. Даниловъ* (Уфа).

№ 137 (2 сер.). Показать, что сумма квадратовъ сторонъ гармоническаго четыреугольника равна удвоенному произведенію двухъ медіанъ, выходящихъ изъ концовъ какой нибудь стороны и продолженныхъ до встрѣчи съ описаннаго около четыреугольника окружностью.

Въ гармоническомъ четыреугольникѣ ABCD черезъ средину E діагонали BD проводимъ прямую AE до пересѣченія съ описанною окружностью въ точкѣ C′ и еще проводимъ прямыя BC′, DC′, CE. По свойству гармоническаго четыреугольника

$$BC' = DC;\ DC' = BC;\ EC' = EC;\ DE^2 = \frac{BD^2}{4} = AE.CE.$$

Обозначимъ средину линіи AC′ черезъ G. Тогда

$$AB^2 + BC'^2 + C'D^2 + DA^2 = BD^2 + AC'^2 + 4EG^2$$

или $$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 =$$

$$= 4AE.C'E + AC'^2 + 2\left(\frac{AC'}{2} - AE\right)^2 + 2\left(EC' - \frac{AC'}{2}\right)^2 =$$

$$= 4AE.C'E + 2AC'^2 + 2AE^2 + 2EC'^2 - 2AC'(AE + EC') =$$

$$= 2(AE + EC')^2 + 2AC'^2 - 2AC'(AE + EC') = 2AC'^2.$$

Если CE продолжимъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ D′, то CD′=AC′. Такимъ образомъ $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2.AC'.CD'$ что и требовалось доказать.

И. Бискъ (Кіевъ); *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ).

№ 285 (2 сер.). Опредѣлить предѣлъ, къ которому стремится произведеніе

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$$

при условіи, что $x<1$.

Еслибы производителей было только два, то произведеніе $(1+x)(1+x^2)$ имѣло бы послѣдній членъ x^3; еслибы производителей было три, то произведеніе $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ имѣло бы послѣднимъ членомъ x^7; еслибы производителей было четыре, то произведеніе $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ имѣло бы послѣдній членъ x^{15} и т. д., вообще если возьмемъ n производителей, то послѣдній членъ произведеніи будетъ x^{2^n-1}; такимъ образомъ данное произведеніе можетъ быть выражено такъ

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{2^n-1},$$

сумма этого ряда S будетъ

$$S=\frac{x^{2^n}-1}{x-1};$$

переходя къ предѣлу при $n=\infty$ и $x<1$, найдемъ

$$\lim S=\lim\frac{x^{2^n}-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}.$$

В. Рудинъ (Пенза); *В. Костинъ* (Симбирскъ).

№ 101 (1 сер.). Показать, что произведеніе противоположныхъ медіанъ гармоническаго четыреугольника равно четверти квадрата другой діагонали.

NB. Медіаной въ четыреугольникѣ называется прямая, соединяющая его вершину съ срединой діагонали.

Эта теорема можетъ быть выражена иначе слѣдующ. образомъ: „половина діагонали гармоническаго четыреугольника есть средняя пропорціональная между прямыми соединяющими ея средину съ концами второй діагонали". Доказательство-же этой теоремы изложено въ статьѣ проф. Ермакова „Гармоническій четыреугольникъ" см. № 1 В. О. Ф. стр. 8.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ); *В. Рубцовъ*, *В. Тюнинъ* (Уфа); *В. Россовская*, (Курскъ); *И. Бискъ* (Кіевъ); *А. Витковскій* (Великолуцкъ).

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса 30 Января 1893 г.

Типо-литографія „Одесскихъ Новостей". Пушкинская, д. № 11.